

## ЗАПРЕЩЕННЫЕ ПОЛОСЫ БЕТАТРОННЫХ ЧАСТОТ В КОЛЛАЙДЕРЕ ВЭПП-2000<sup>1</sup>

© 2025 г. Д. Э. Чистяков<sup>a, b, \*</sup>, Е. А. Переведенцев<sup>a, b</sup>

<sup>a</sup> Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера  
Сибирского отделения Российской академии наук  
Россия, 630090, Новосибирск, просп. Академика Лаврентьева, 11

<sup>b</sup> Новосибирский государственный университет  
Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1

\* e-mail: d.e.chistyakov@inp.nsk.su

Поступила в редакцию 13.12.2023 г.

После доработки 8.05.2024 г.

Принята к публикации 20.05.2024 г.

Соленоиды финального фокуса электрон-позитронного коллайдера с круглыми пучками ВЭПП-2000 могут создавать запрещенные полосы на плоскости бетатронных частот. Это ограничивает важную для коллайдера область вблизи параметрических резонансов (малых дробных частей бетатронных частот). Представлен теоретический обзор совместного действия эффектов от неточной компенсации соленоидов и параметрических резонансов на целых частотах. Результаты дополнены численными расчетами и моделированием с помощью программы RING. Из эксперимента найдены границы области устойчивости на плоскости бетатронных частот, их положение согласуется с теоретическим ожиданием.

DOI: 10.7868/S3034564225070071

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Наличие связи бетатронных колебаний, например из-за нескомпенсированного поворота плоскости колебаний от соленоидов финального фокуса коллайдера ВЭПП-2000 [1], приводит к появлению запрещенных полос специального вида на плоскости бетатронных частот. Такого рода ограничение вместе с различными машинными резонансами сужает рабочую область бетатронных частот. Для помещения рабочей точки в максимально эффективную для коллайдера область малых дробных частей бетатронных частот необходимо контролировать, т.е. уменьшать влияние совместного эффекта запрещенных полос и резонансов на целых частотах.

### 2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

При описании линейного поперечного движения частиц в циклическом ускорителе с учетом связи бетатронных колебаний используется матричный формализм. Положение частиц задается четырехмерными векторами вида  $X^T = (x, p_x, y, p_y)$ . В этих терминах можно описать совместное действие резонансов и запрещенных полос.

#### 2.1. Определяющие резонансы

Выражение для амплитуды резонанса на целой частоте можно получить, используя теорию возмущений. К примеру, пусть в системе без связи введено возмущение магнитной системы  $G^T = (0, x \cdot g^x(s), 0, 0)$  для колебаний  $x, y \equiv 0$ .

<sup>1</sup> Материалы 28-й конференции по ускорителям заряженных частиц “RuPAC’23”, г. Новосибирск.

Ввиду отсутствия связи решение для колебаний по оси  $x$  может быть найдено из исходных 4-векторов Флоке

$$F_x^T = \left( w_x, w'_x + \frac{i}{w_x}, 0, 0 \right) e^{i\psi_x}$$

( $w_x$  – огибающая бетатронных колебаний) в виде

$$X = \frac{1}{2} (AF_x + A^* F_x^*), \quad (1)$$

здесь  $A = a(s)e^{i\Delta\varphi(s)}$ , где  $a(s)$  и  $\varphi(s)$  – медленные относительно бетатронной частоты функции. В таком случае известно уравнение на  $A$  [2]:

$$A' = -iF_x^{*T} S G, \quad (2)$$

где

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В случае полуцелого резонанса ( $\nu_x = k/2 + \Delta$ ) после усреднения по быстрой фазе

$$\Psi_x = \left( \frac{k}{2} + \Delta \right) \frac{s}{R} + \chi_x(s)$$

при малой расстройке  $\Delta$  получаем

$$a' + ia\varphi' = -\frac{i}{2} g_k^x a e^{-i\left(2\Delta\frac{s}{R} + 2\varphi\right)}, \quad (3)$$

где за амплитуду полуцелого резонанса взята усредненная по периоду структуры величина

$$g_k^x = \frac{1}{2\pi R} \cdot w_x^2(s) g^x(s) e^{-i\left(k\frac{s}{R} + 2\chi_x(s)\right)} ds. \quad (4)$$

Аналогичные выкладки можно провести и для  $y$  колебаний для получения амплитуды  $g_k^y$ .

Кроме упомянутых выше резонансов существует разностный ( $\nu_x - \nu_y = n + \Delta$ ) и суммовый ( $\nu_x + \nu_y = n + \Delta$ ) резонансы связи, их амплитуды соответственно равны [3]

$$C = \frac{1}{2\pi R} \oint w_x w_y (C_{field}) e^{-i\left(\chi_x - \chi_y + \frac{ns}{R}\right)} ds, \quad (5)$$

$$S = \frac{1}{2\pi R} \oint w_x w_y (S_{field}) e^{-i\left(\chi_x + \chi_y + \frac{ns}{R}\right)} ds, \quad (6)$$

где

$$C_{field} = q + \frac{L}{2} \left( \frac{w'_y}{w_y} - \frac{w'_x}{w_x} \right) + i \frac{L}{2} \left( \frac{1}{w_x^2} + \frac{1}{w_y^2} \right),$$

$$S_{field} = q + \frac{L}{2} \left( \frac{w'_y}{w_y} - \frac{w'_x}{w_x} \right) + i \frac{L}{2} \left( \frac{1}{w_x^2} - \frac{1}{w_y^2} \right),$$

$$q = \frac{e}{2pc} \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \right), \quad L = \frac{eB_s}{pc}.$$

## 2.2. Матрица периода

При известных огибающих функциях и в отсутствие связи матрица периода для одной степени свободы записывается в виде

$$M_0 = \begin{pmatrix} c_0 - w_0 w'_0 s_0 & w_0^2 s_0 \\ -\left( w_0'^2 + \frac{1}{w_0^2} \right) s_0 & c_0 + w_0 w'_0 s_0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где  $c_0 = \cos \mu_0$ ,  $s_0 = \sin \mu_0$ ,  $\mu_0 = 2\pi\nu_0$  – набег бетатронной фазы за период.

Учет уединенного резонанса на целой частоте можно сделать, продолжая выкладки теории возмущений (1)–(4) из предыдущего раздела. Новая матрица периода будет построена из возмущенных векторов Флоке  $F_a$  и  $F_b$ , а также их собственных чисел  $\lambda$  (набегов бетатронных фаз) следующим образом:

$$M = (F_a F_b) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_a & 0 \\ 0 & \lambda_b \end{pmatrix} \cdot (F_a F_b)^{-1}, \quad (8)$$

где  $(F_a F_b)$  – матрица  $2 \times 2$ , составленная из двух векторов-столбцов.

Рассчитанные таким образом элементы матрицы  $M$  соответственно равны

$$m_{11} = c_r - s_r \frac{w'w(\delta + g_k c_\theta) - g_k s_\theta}{r},$$

$$m_{12} = s_r \frac{w^2(\delta + g_k c_\theta)}{r}, \quad (9)$$

$$m_{21} = -s_r \left\{ A_m \frac{\delta}{r} + (B_m c_\theta - C_m s_\theta) \cdot \frac{g_k}{r} \right\},$$

$$m_{22} = c_r + s_r \frac{w'w(\delta + g_k c_\theta) - g_k s_\theta}{r},$$

где  $g_k$  – модуль амплитуды соответствующего резонанса (4),  $\alpha$  – его комплексная фаза,

$$\delta = \frac{2\Delta}{R}, \quad c_r = \cos\left(\frac{1}{2}sr\right), \quad s_r = \sin\left(\frac{1}{2}sr\right),$$

$$r = \sqrt{\delta^2 - g_k^2}, \quad c_\theta = \cos(\alpha - \delta s + 2\Psi),$$

$$s_\theta = \sin(\alpha - \delta s + 2\Psi), \quad A_m = \left( w'^2 + \frac{1}{w^2} \right),$$

$$B_m = \left( w'^2 - \frac{1}{w^2} \right), \quad C_m = 2 \frac{w'}{w}.$$

Для двух степеней свободы матрица периода  $4 \times 4$  без связи запишется в виде

$$M_4 = \begin{pmatrix} M_x & 0 \\ 0 & M_y \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где за  $M_{x,y}$  можно взять (7) или (8) для соответствующей степени свободы.

Связь бетатронных колебаний из-за соленоидов можно описать, например, с помощью тонкой матрицы поворота плоскости колебаний на угол  $\varphi$ :

$$R = \begin{pmatrix} I \cdot \cos \varphi & I \cdot \sin \varphi \\ -I \cdot \sin \varphi & I \cdot \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где  $I$  – единичная матрица  $2 \times 2$ .

Тогда новая матрица периода будет выражена произведением

$$M_{tot} = R \cdot M_4. \quad (12)$$

### 2.3. Запрещенные полосы бетатронных частот

Появление запрещенных полос бетатронных частот обусловлено тем, что при внедрении возмущения не всем начальным частотам соответствуют устойчивые решения.

В общем случае устойчивое решение соответствует условиям

$$|\cos \mu| \leq 1, \quad (13)$$

$$\text{Im}(\cos \mu) = 0. \quad (14)$$

При переходе к двумерным колебаниям запрещенные полосы превращаются в запрещенные области. Так, для  $x$  и  $y$  матриц (7) с возмущением  $R$  можно найти собственные числа  $e^{\pm i\mu_{1,2}}$  возмущенной матрицы периода (12). Набеги бетатронных фаз за новый период задаются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \cos \mu_{1,2} = & \cos \frac{\mu_{0x} + \mu_{0y}}{2} \cos \frac{\mu_{0x} - \mu_{0y}}{2} \cos \varphi \pm \\ & \pm \sqrt{\sin^2 \frac{\mu_{0x} + \mu_{0y}}{2} \left( 1 - \cos^2 \frac{\mu_{0x} - \mu_{0y}}{2} \cos^2 \varphi \right) + B \sin \mu_{0x} \sin \mu_{0y} \sin^2 \varphi}, \quad (15) \\ \text{где } B = & \frac{1}{4} \left\{ \left( \frac{w_{0x}}{w_{0y}} - \frac{w_{0y}}{w_{0x}} \right)^2 + \left( w_{0x} w'_{0y} - w_{0y} w'_{0x} \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

а значения огибающих функций взяты в начальной точке.

Тогда запрещенные области, выделенные розовым цветом, выглядят так, как показано на рис. 1.

Кроме запрещенных областей и их границ можно отобразить линии уровня новых коси-

нусов набега бетатронной фазы (рис. 2). Здесь линии уровня красного и синего цветов соответствуют двум новым косинусам, розовые области – запрещенные. На плоскости возмущенных частот эти линии уровня переходят в обычную прямоугольную сетку,  $v_{x,y} = \text{const}$ .

На рис. 3 представлен результат численного расчета запрещенных областей, отмеченных красным цветом, для случая совместного действия резонансов на целых частотах и поворота от соленоидов. Матрица периода выражена произведением матриц (8) и возмущения  $R$  с параметрами связи, близкими к рис. 2, и разными амплитудами резонансов.

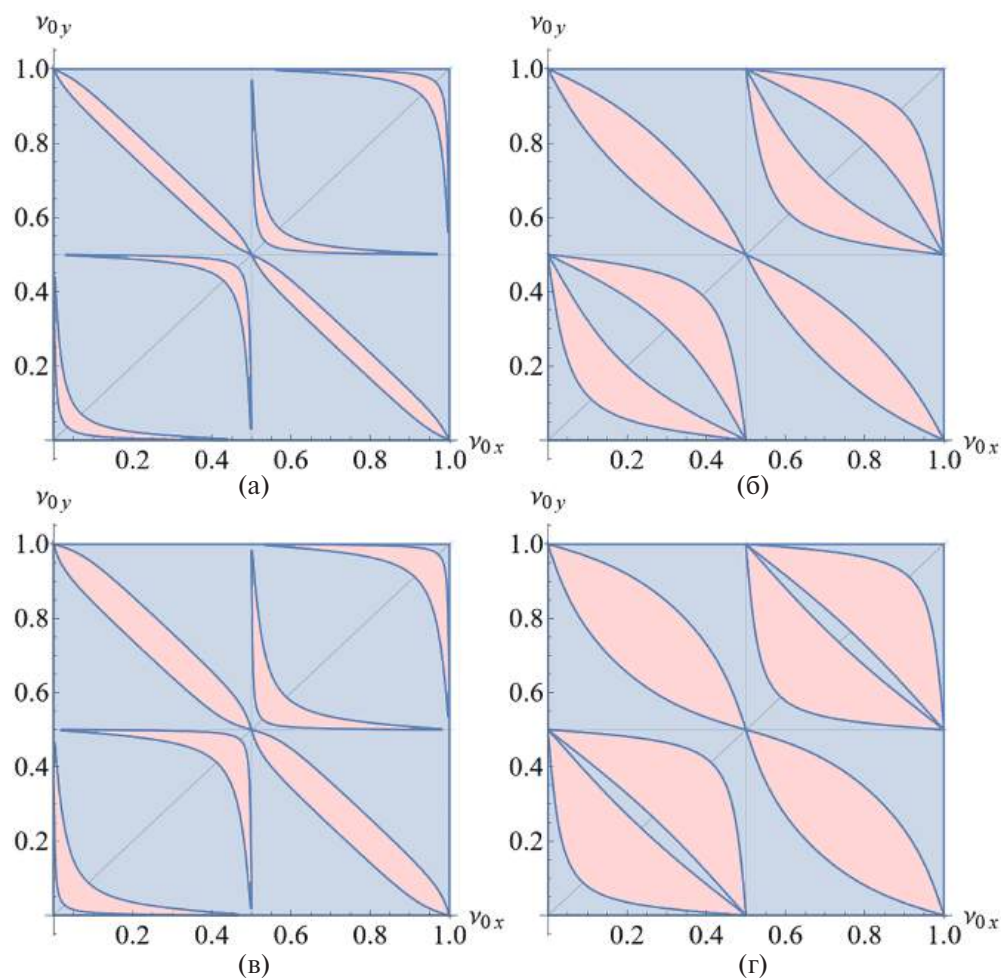
В целом, присутствие резонансов на целых частотах искажает повторяющуюся картину рис. 2 вблизи этих целых частот; при отдалении от них, в других клетках, картина восстанавливается. На рис. 4 параметры резонансов следующие:  $g^x = 0.12$ ,  $g^y = 0.08$ ,  $\alpha^x = 2\pi \cdot 0.2$ ,  $\alpha^y = 0$ .

## 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ПРОГРАММЕ RING

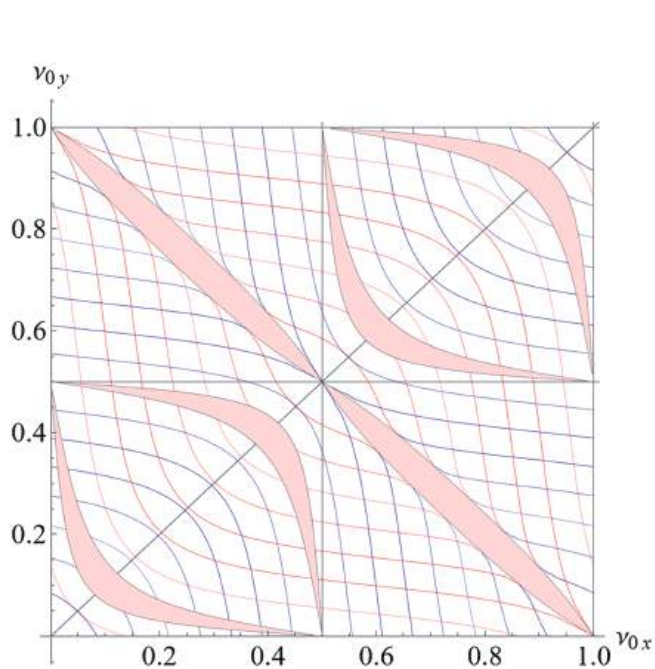
Для облегчения понимания экспериментальных данных было проведено моделирование устойчивости движения на программе RING в исходной линейной оптике коллайдера ВЭПП2000 с целыми частями бетатронных частот  $v_x = 4$ ,  $v_y = 2$ . В этой оптике соленоиды финального фокуса в каждом из двух мест встречи попарно скомпенсированы (суммарно не вращают плоскость бетатронных колебаний).

Пусть нарушение компенсации соленоидов представлено бесконечно тонким элементом,

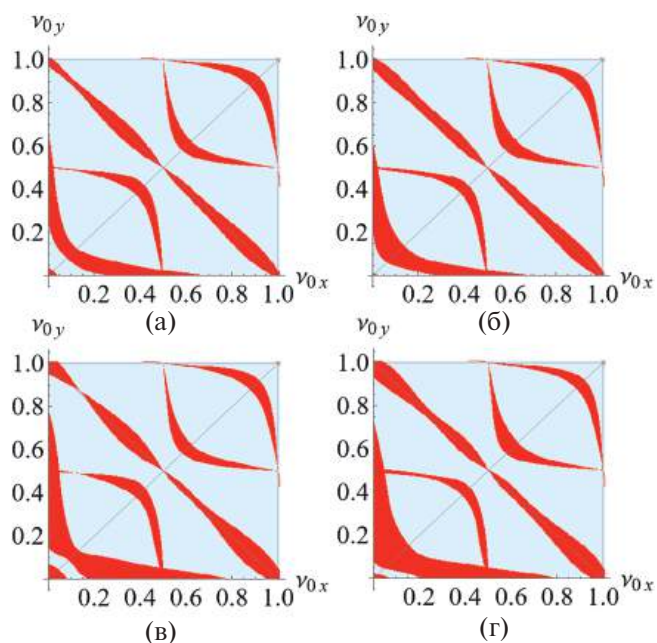
вращающим плоскость бетатронных колебаний на малый угол, при этом пренебрегается возмущение фокусировки соленоидов. Расположение этого элемента у одного из соленоидов и описание его матрицей (11) с углом  $\varphi = 2\pi \cdot 0.05$  дает результат, показанный на рис. 5.



**Рис. 1.** Запрещенные полосы бетатронных частот при возмущении поворотом: **а** –  $\varphi = 2\pi \cdot 0.05$ ,  $B = 0.125$ ; **б** –  $\varphi = 2\pi \cdot 0.15$ ,  $B = 0.125$ ; **в** –  $\varphi = 2\pi \cdot 0.05$ ,  $B = 0.375$ ; **г** –  $\varphi = 2\pi \cdot 0.15$ ,  $B = 0.375$ .



**Рис. 2.** Линии уровня косинусов набега бетатронной фазы.



**Рис. 3.** Совместное действие резонансов и соленоидов: **а** –  $g^{x,y} = 0.05$ ,  $\alpha^{x,y} = 0$ ; **б** –  $g^{x,y} = 0.05$ ,  $\alpha^x = \pi \cdot 0.5$ ,  $\alpha^y = 0$ ; **в** –  $g^{x,y} = 0.1$ ,  $\alpha^{x,y} = 0$ ; **г** –  $g^{x,y} = 0.1$ ,  $\alpha^x = \pi \cdot 0.5$ ,  $\alpha^y = 0$ .

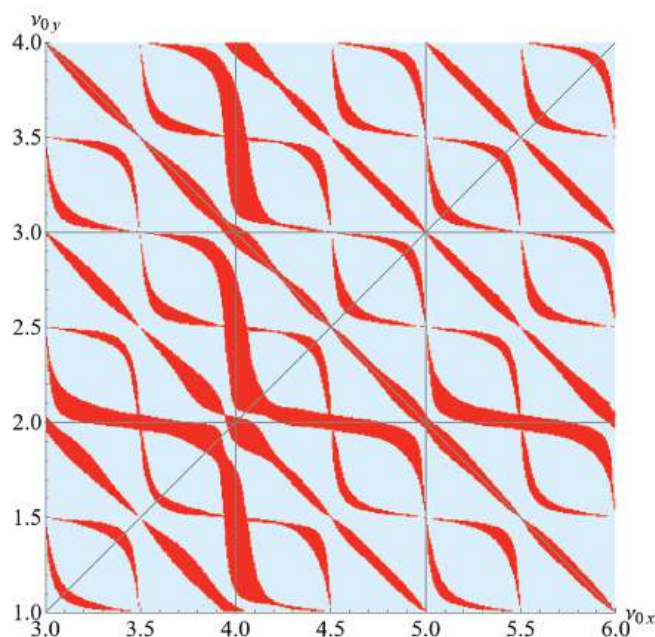


Рис. 4. Совместное действие резонансов и соленоидов. На плоскости частот показано несколько клеток.

Здесь слева представлена плоскость невозмущенных частот, а справа — возмущенных, т.е. исходная рабочая точка на плоскости слева под воздействием возмущения связи переходит в другое место на плоскости справа. Для наглядности серии точек разделены цветами.

Таким образом, с помощью моделирования показано, что край запрещенной зоны, вызванной возмущением связи в виде тонкого элемента кручения, переходит в линии на целых возмущенных частотах.

На реальной установке возмущение связи создается нарушением компенсации соленоидов. Иначе говоря, чтобы создать угол из формулы (15), необходимо усилить или ослабить поле соленоидов, при этом также изменятся его фокусирующие свойства. По этой причине картина моделирования предсказуемо приобретет отличия от ожидаемой. Результат моделирования с суммарным углом кручения  $\varphi = 2\pi \cdot 0.01$  приведен на рис. 6, однако граница запрещенных областей по-прежнему соответствует целым частотам.

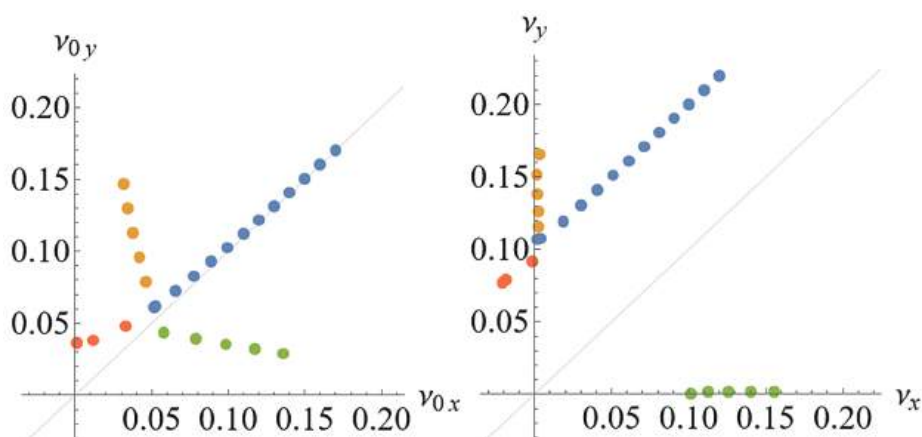


Рис. 5. Моделирование с элементом кручения нулевой длины.

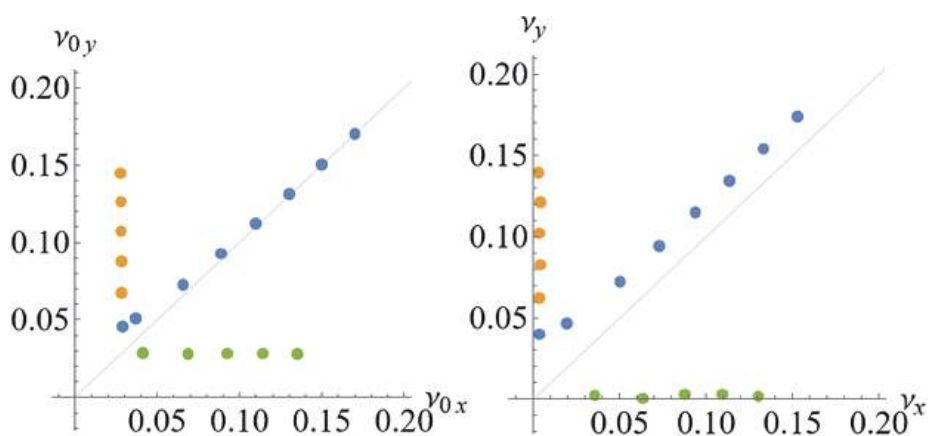


Рис. 6. Моделирование с изменением полей соленоидов.

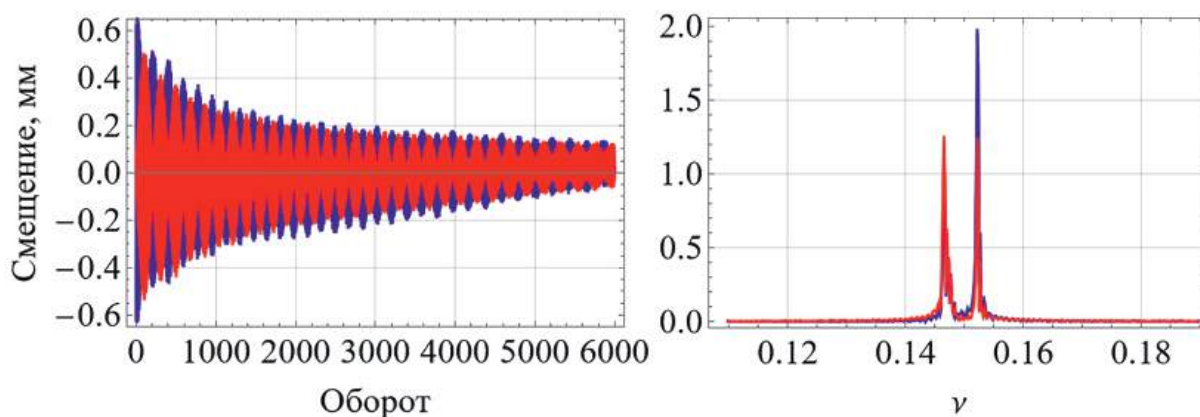


Рис. 7. История колебаний пучка и ее спектр по координатам  $x$  и  $y$ .

#### 4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Картина реальных запрещенных областей была экспериментально изучена на коллайдере ВЭПП2000 с одиночным пучком электронов. Из истории колебаний пучка, возбужденных ударом, с помощью фурье-преобразования определялось положение рабочей точки [4]. Типичный вид данных вблизи разностного резонанса связи показан на рис. 7.

Помимо этого, велось измерение времени жизни пучка путем численной аппроксимации токовой зависимости от времени с характерным временем спада  $\tau = -I / \dot{I}$ . При нормаль-

ной работе комплекса время жизни составляет порядка 4000 с.

Положение запрещенных областей было снято в наиболее интересной области малых дробных частей бетатронных частот. Перемещение рабочей точки имеющимися на пультовой коллайдера “ручками” дало следующую картину времени жизни, изображенную на рис. 8.

Резкий спад времени жизни вызван приближением к краям запрещенных областей, при котором нарастают биения бета-функций, и пучок начинает быстрее гибнуть, не попадая в динамическую апертуру.

Таким образом, экспериментально найдено положение границы устойчивости и, следовательно, края запрещенной зоны. Форма этой границы создана совместным действием определяющих резонансов.

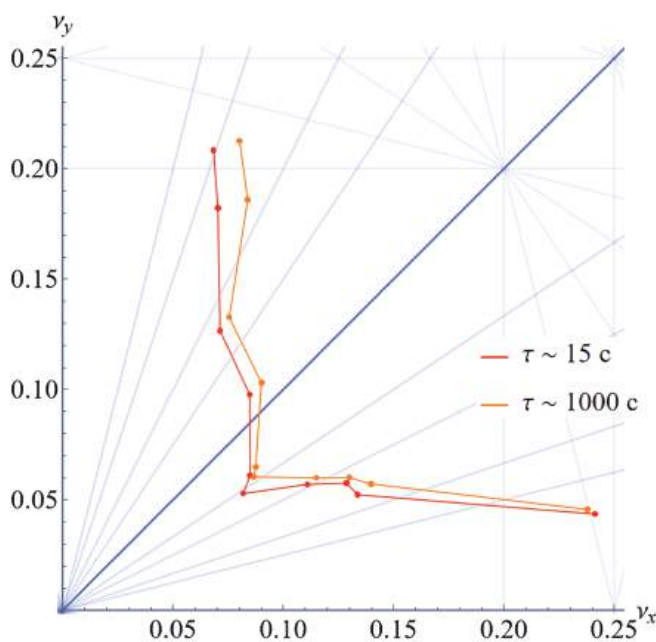


Рис. 8. Линии равного времени жизни.

#### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Качественно представлены причины появления запрещенных полос бетатронных частот, их расположение и форма, а также результаты численного моделирования границ устойчивости на программе RING и экспериментально измеренное положение линий равного времени жизни на плоскости бетатронных частот ВЭПП-2000. Расширение рабочей области сводится к уменьшению резонансных амплитуд указанных в работе резонансов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беркаев Д.Е., Шварц Д.Б., Шатунов П.Ю., Роговский Ю.А., Романов А.Л., Кооп И.А., Шату-

- нов Ю.М., Землянский И.М., Лысенко А.П., Переведенцев Е.А., Станкевич А.С., Сенченко А.И., Хазин Б.И., Анисенков А.В., Гаязов С.Е. и др. // ЖЭТФ. 2011. Т. 140. С. 247.
2. *Perevedentsev E.A.* // AIP Conf. Proc. 2001. V. 592. P. 6. <https://doi.org/10.1063/1.1420408>
  3. *Guignard G.* The General Theory of All Sum and Difference Resonances in a Three-Dimensional Magnetic Field in a Synchrotron. Geneva: CERN, 1976. P. 74.
  4. *Rogovsky Yu. A., Bekhtenev E.A.* // Proceedings of DIPAC2011. Hamburg, Germany. 2011. P. 203.