

**ОБЩАЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ
ТЕХНИКА**

УДК 53.07, 537.6

**СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КАРТЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАГНИТНОГО
ПОЛЯ В ЗАЗОРЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ЛАБОРАТОРНОГО
ЭЛЕКТРОМАГНИТА**

©2025 г. В. Н. Глазков^{a,b,*}, Д. А. Малиницкий^a, А. Х. Ряжапов^a

*^aНациональный исследовательский университет “Высшая школа экономики”,
факультет физики*

Россия, 105066, Москва, ул. Старая Басманная, 21/4

*^bИнститут физических проблем им. П.Л.Капицы Российской академии наук
Россия, 119334 Москва, ул. Косыгина, 2*

**e-mail: glazkov@kapitza.ras.ru*

Поступила в редакцию 30.01.2025 г.

После доработки 03.03.2025 г.

Принята к публикации 17.03. 2025 г.

Предложен подход к определению и описанию распределения продольной и поперечной компонент магнитного поля в осесимметричном лабораторном электромагните, основанный на полиномиальном разложении индукции поля с учетом накладываемых уравнениями Максвелла ограничений. Показано, что предложенный подход позволяет получать высокую точность описания распределения магнитного поля при небольшом количестве измерений. Также он может представлять интерес для уточнения параметров лабораторного оборудования и использоваться в качестве учебной задачи лабораторного практикума при изучении свойств электромагнитного поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Магнитное поле является распространенным способом воздействия на свойства образца в физическом эксперименте. Поэтому во многих случаях важно знать карту распределения

магнитного поля в месте расположения образца. При конструировании новых магнитных систем этот вопрос анализируется еще на этапе проектирования, что позволяет заранее рассчитать необходимые характеристики. Расчеты такого типа используются как в промышленных задачах, так и при создании разнообразных научных приборов – от лабораторных спектрометров до ускорителей [1–5].

Однако в лабораторной практике нередко возникает ситуация, когда уже имеется некоторая магнитная система, точные характеристики которой и номенклатура используемых материалов изменены в ходе ремонта или утрачены. В этом случае расчет распределения магнитных полей *ab initio* оказывается бесполезен и необходимо восстановить карту распределения магнитного поля, измерив компоненты индукции магнитного поля в рабочей области магнитной системы. Известно множество подходов к организации такого измерения, например, с использованием матрицы детекторов [6] или системы позиционирования датчика, позволяющей перемещать датчик магнитного поля относительно магнита [7, 8]. Точность такого прямого измерения ограничивается точностью позиционирования датчика и размером самого датчика, что ограничивает возможности определения распределения магнитного поля на масштабах менее сантиметра. Кроме того, изготовление системы позиционирования датчика является отдельной технической задачей.

Достаточно часто лабораторные магниты имеют осевую конструкционную симметрию. Для таких магнитных систем мы предлагаем подход, основанный на измерении магнитной индукции в относительно небольшом количестве точек в интересующей области и восстановлении по этим измерениям полной картины распределения компонент магнитной индукции при помощи полиномиального разложения с учетом накладываемых уравнениями Максвелла ограничений. Предложенный подход был опробован на лабораторном электромагните с двумя конфигурациями полюсов. Измерения показали, что для получения карты магнитного поля с практически значимой точностью достаточно небольшого количества точек измерения магнитной индукции, что позволяет использовать стандартные измерители магнитной индукции и простые в изготовлении приспособления для их позиционирования.

2. ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ С УЧЕТОМ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ МАГНИТЕ

Для цилиндрической геометрии полюсов и катушек электромагнита (рис. 1) магнитное поле в зазоре между полюсами имеет только продольную B_z и радиальную B_r компоненты. Магнитная индукция $\mathbf{B}(z, r)$ в центральной области зазора может быть разложена в ряд (выбор осей проиллюстрирован на рис. 1):

$$B_z(z, r) = \sum_{n, m \leq n} a_n^m (z - z_0)^m r^{n-m}, \quad (1)$$

$$B_r(z, r) = \sum_{n, m \leq n} b_n^m (z - z_0)^m r^{n-m}, \quad (2)$$

где z_0 — координата экстремума продольной компоненты поля на оси магнитной системы (точка $(z_0, 0)$ является седловой точкой в распределении модуля магнитной индукции в зазоре магнита).

Рис. 1. Схематическое изображение лабораторного электромагнита

Уравнения Максвелла задают связь между продольной и радиальной компонентами магнитной индукции в воздушном зазоре магнита:

$$\frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{B_r}{r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0. \quad (4)$$

Это накладывает связи на коэффициенты полиномиального разложения:

$$a_n^{m+1}(m+1) = -b_n^m(n-m+1), \quad (5)$$

$$a_n^m(n-m) = b_n^{m+1}(m+1), \quad (6)$$

откуда

$$a_n^{m-2} = -\frac{m(m-1)}{(n-m+2)^2} a_n^m, \quad (7)$$

$$b_n^{m-2} = -\frac{m(m-1)}{(n-m+2)^2 - 1} b_n^m. \quad (8)$$

Дополнительно можно отметить, что a_0^0 имеет смысл индукции поля в седловой точке $(z_0, 0)$; $a_1^1 = 0$, так как $\partial B_z / \partial z(z_0, 0) = 0$; $b_n^n = 0$ и $a_n^{n-1} = 0$, так как $B_r = 0$ при $r = 0$ (на оси магнита).

Эти условия показывают, что полиномиальные разложения для продольной и радиальной компонент ограничиваются одинаковой степенью полинома и есть только один свободный коэффициент для каждой степени полинома, что существенно упрощает задачу описания распределения полей:

$$B_z(z, r) = \sum_n A_n Z_n(z - z_0, r), \quad (9)$$

$$B_r(z, r) = \sum_n A_n R_n(z - z_0, r), \quad (10)$$

где

$$Z_n(z - z_0, r) = \sum_{m \leq n} a_n^m (z - z_0)^m r^{n-m}, \quad (11)$$

$$R_n(z - z_0, r) = \sum_{m \leq n} b_n^m (z - z_0)^m r^{n-m} \quad (12)$$

и коэффициенты описаны в формулах (5), (6), а также $a_n^n = 1$. Для удобства использования коэффициенты a_n^m и b_n^m полиномов $Z_n(z - z_0, r)$ и $R_n(z - z_0, r)$ для вычисления аксиальной и радиальной компонент поля для $n \leq 8$ приведены в табл. 1, 2.

Таблица 1. Коэффициенты a_n^m полиномов $Z_n(z - z_0, r)$ (11) для вычисления аксиальной компоненты индукции магнитного поля $B_z(z, r)$

n	m								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0	0							
2	-1/2	0	1						
3	0	-3/2	0	1					
4	3/8	0	-3	0	1				
5	0	15/8	0	-5	0	1			
6	-5/16	0	45/8	0	-15/2	0	1		
7	0	-35/16	0	105/8	0	-21/2	0	1	
8	35/128	0	-35/4	0	105/4	0		0	1

Таблица 2. Коэффициенты b_n^m полиномов $R_n(z - z_0, r)$ (12) для вычисления радиальной компоненты индукции магнитного поля $B_r(z, r)$ для $a_n^n = 1$

n	m								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0								
1	0	0							
2	0	-1	0						
3	3/8	0	-3/2	0					
4	0	3/2	0	-2	0				
5	-5/16	0	15/4	0	-5/2	0			
6	0	-15/8	0	15/2	0	-3	0		
7	35/128	0	-105/16	0	105/8	0	-7/2	0	
8	0	35/16	0	-35/2	0	21	0	-4	0

Нечетные степени n полиномов в разложениях (1), (2) описывают асимметрию распределения поля относительно перпендикулярной к оси магнитной системы плоскости, проходящей через седловую точку $(z_0, 0)$. В большинстве случаев конструкция лабораторного электромагнита симметрична относительно этой плоскости и эти слагаемые могут быть либо отброшены, либо имеют дополнительную малость. В результате для симметричной конструкции полюсов даже при использовании полиномов восьмой степени для описания распределения поля остается всего шесть свободных параметров $(A_0, A_2, A_4, A_6, A_8, z_0)$.

3. ПРАКТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА МЕТОДИКИ

3.1 Организация измерения индукции поля

Для проверки применимости предлагаемой методики было проведено измерение продольной и радиальной компонент индукции магнитного поля в двух конфигурациях полюсов лабораторного электромагнита (рис. 2): с плоскими полюсами диаметром 160 мм и расстоянием между полюсами 104 мм и с сужающимися коническими полюсами с диаметром концов полюса

57 мм и расстоянием между полюсами 62.5 мм. В обоих случаях расстояние между полюсами и диаметры наконечников полюсов были близки, что является достаточно типичной ситуацией для лабораторных магнитов.

Рис. 2. Схема использованных конфигураций полюсов электромагнита и конструкций матрицы для фиксации зонда измерителя магнитной индукции...

Измерения распределения поля проводились в центре зазора в диапазоне 0.4–0.8 Тл. Для измерения индукции магнитного поля использовался измеритель магнитной индукции Ш1-8.

Для позиционирования зонда измерителя магнитной индукции методом 3D-печати были изготовлены матрицы с крестообразными установочными гнездами для измерения продольной и радиальной компонент магнитной индукции (рис. 2).

Центровка матриц в зазоре осуществлялась с помощью изготовленных методом 3D-печати кольцевых направляющих, плотно охватывающих полюса магнита, которые крепились к матрице. Размер чувствительной области датчика в измерителе магнитной индукции составляет около 1 мм, погрешность изготовления установочных гнезд и центровки матриц оказывается в несколько раз меньше. Шаг между центрами установочных гнезд равен 8.8 мм как вдоль оси магнита, так и в радиальном направлении. Один из рядов установочных гнезд находился на геометрической оси полюсов и в срединной плоскости зазора между полюсами. Выбор начала координат для отсчета координаты вдоль оси магнитной системы определяется соображениями удобства, он проиллюстрирован на рис. 2: для плоских полюсов мы измеряли расстояние от полюса, для конических полюсов – от центра крайнего установочного гнезда.

3.2. применение полиномиальной модели для определения распределения магнитной индукции в зазоре магнита

Было проведено измерение величин продольной и радиальной компонент магнитной индукции в более чем 100 точках в зазоре магнита для обеих конфигураций полюсов. По результатам измерений продольной компоненты магнитной индукции для каждой конфигурации полюсов определялся оптимальный набор параметров полиномиальной модели.

Сильная неоднородность поля вблизи углов полюсов не позволяет достаточно точно описать распределение магнитного поля по всей ширине зазора. Однако в представляющей практический интерес центральной области зазора магнита (соответствующие положения установочных гнезд отмечены розовой заливкой на рис. 2) оказалось достаточным применения полиномов шестой степени для описания распределения магнитной индукции с точностью около

0.2% для плоских полюсов и с точностью около 0.5% для конических полюсов (рис. 3). В качестве характерного примера учета реального распределения полей в магните можно привести положение седловой точки распределения поля в зазоре магнита $(z_0, 0)$: для плоских полюсов мы получили $z_0 = (50.8 \pm 0.1)$ мм (геометрический центр зазора между полюсами соответствует $Z_{ц} = 52.0$ мм), для конических полюсов $z_0 = (52.9 \pm 0.1)$ мм (геометрический центр зазора между полюсами соответствует $Z_{ц} = 52.8$ мм).

Рис. 3. Сравнение измеренного распределения продольной компоненты вектора магнитной индукции и описания этого распределения в полиномиальной модели

Выбор области для определения оптимального набора коэффициентов полиномиальной модели можно описать эмпирическим правилом: для плоских полюсов с ожидаемо большой однородностью поля в зазоре взята область шириной примерно $2/3$ от ширины зазора и высотой примерно $1/2$ от радиуса полюсов; для конических полюсов, концентрирующих силовые линии магнитного поля, но создающих более неоднородное поле, была выбрана область также шириной около $2/3$ от ширины зазора и высотой чуть больше радиуса наконечника полюса. В случае более однородного поля в зазоре между плоскими полюсами оказалось необходимым более жесткое ограничение по высоте выбранной области (меньше радиуса полюса) из-за особенностей сходимости полиномиального ряда (1): широкая область почти однородного поля в центре переходит в неоднородное поле при вертикальном отклонении примерно на радиус полюса, что плохо описывается малым числом степеней полинома. Возможно, для таких случаев может найтись более удобный базис разложения, но, по нашему мнению, простота работы с полиномами (1), (2) (в практически более удобной записи (9), (10)) оправдывает ограничение рассматриваемой области.

По результатам подгонки данных для продольной компоненты вектора магнитной индукции по уравнению (10) можно восстановить распределение радиальной компоненты индукции (рис. 4а), которое хорошо согласуется с проведенными измерениями в центральной области зазора. Это позволяет ограничиться только измерениями основной продольной компоненты вектора магнитной индукции в зазоре магнита для определения параметров полиномиального разложения.

Рис. 4. а – Сравнение результатов измерения радиальной компоненты вектора магнитной индукции для конфигурации магнита с коническими полюсами...

Отметим, что наклон плоскости датчика магнитной индукции на малый угол φ легко может привести к тому, что радиальная компонента вектора магнитной индукции B_r и проекция продольной компоненты на нормаль к плоскости датчика φB_z окажутся сравнимыми, так что вычисление радиальной компоненты магнитной индукции (10) может оказаться более точным, чем ее прямое измерение. Например, для данных, представленных на рис. 4, допущение о наклоне плоскости датчика на 0.7° (что вполне допустимо как конструкцией измерителя магнитной индукции, так и точностью позиционирования щупа измерителя индукции в направляющих гнездах матрицы) уменьшает расхождение измеренных и расчетных значений радиальной компоненты магнитной индукции примерно вдвое, а остающееся расхождение (на уровне нескольких миллитесла при индукции продольного поля в центре магнита около 750 мТл), по-видимому, связано с систематическим наклоном или искажением формы измерительной матрицы на столь же малый угол (на рис. 4б видно, что различие вычисленных и измеренных значений систематически плавно меняет знак при переходе от точек выше оси магнита к точкам ниже оси магнита). Влияние этих малых отклонений ориентации датчика на измерение продольной компоненты вектора магнитной индукции имеет квадратичную по углу отклонения малость и гораздо менее существенно, поэтому вычисление радиальной компоненты индукции магнитного поля для достаточно однородных конфигураций поля оказывается более надежным, чем попытка их непосредственного измерения.

Таким образом, можно полностью восстановить карту распределения индукции магнитного поля в зазоре магнита, выделить область в центре зазора с отклонениями модуля магнитной индукции в заданных пределах или проанализировать расхождение направлений силовых линий магнитного поля в области нахождения образца (рис. 5).

Рис. 5. а – Цветовая карта распределения модуля вектора магнитной индукции, нормированного на значение в седловой точке...

Интересным для практических применений оказалось следующее наблюдение. Малое количество свободных параметров (для полинома шестой степени это пять параметров: z_0 , A_0 , A_2 , A_4 и A_6) позволяет обойтись весьма компактным набором точек для измерения значений магнитной индукции без существенного ухудшения качества описания распределения магнитного поля в зазоре магнита. Мы проверили, что для исследованных конфигураций полюсов сравнимое качество описания распределения магнитного поля в центральной области зазора получается как при использовании описанной выше большой выборки позиций зонда (81

позиция для плоских полюсов и 45 позиций для конических полюсов, отмечены розовой заливкой на рис. 2), так и при использовании контрольной выборки из всего шести измерительных позиций, отмеченных красной заливкой на рис. 2 и 3в,г, расположенных по оси магнита и по периметру центральной области (см. рис. 6). Положения экстремума поля на оси магнита z_0 различаются в наших случаях для двух способов вычисления оптимальных коэффициентов полинома на 0.2–0.3 мм. Практически во всей центральной области зазора различия значений продольной компоненты вектора магнитной индукции, вычисленных с использованием полиномиальных моделей с коэффициентами, определенными по большому и малому наборам положений датчика, лежит в пределах 1%, а в заметной части центральной области это различие заметно меньше (см. рис. 6).

Рис. 6. Сравнение значений продольной компоненты магнитного поля, вычисленных в полиномиальной модели...

3.3. Возможность применения в учебной практике

Помимо практической пользы для определения распределения магнитного поля в лабораторных установках, предложенный подход к описанию магнитного поля в зазоре электромагнита может быть частью учебного эксперимента.

Измерение компонент вектора магнитной индукции с использованием позиционирующей датчик матрицы позволяет обучающемуся набрать свой собственный массив данных для имеющейся геометрии полюсов. Использование простого в применении полиномиального описания поля, основанного на уравнениях Максвелла, позволяет обучающемуся проверить, как измеренное распределение полей соответствует этим уравнениям и на практике убедиться в их применимости для описания электромагнитных полей.

4. ВЫВОДЫ

Предложена методика эмпирического определения полной карты магнитного поля в зазоре лабораторного магнита, основанная на полиномиальной подгонке измеренного распределения продольной компоненты магнитной индукции, с учетом накладываемых уравнениями Максвелла ограничений.

Проведена практическая проверка предложенной методики на двух конфигурациях полюсов лабораторного магнита, показавшая, что достаточно точное описание распределения поля в области расположения образца можно получить с использованием весьма компактного

набора измеренных значений магнитной индукции (шесть позиций датчика для практически значимой области размером примерно $5 \times 5 \times 5 \text{ см}^3$), не прибегая к детальному сканированию распределения полей. Это позволяет легко использовать предложенную методику для восстановления картины распределения магнитного поля в лабораторных магнитных системах с осесимметричной конструкцией полюсов, а также применять этот подход в учебных экспериментах.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке НИУ ВШЭ (грант НУГ-24-00-011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буль О.Б. Методы расчета магнитных систем электрических аппаратов. Москва: Изд. центр “Академия”, 2005.
2. Ilin A.V., Chang Diaz F.R., Gurieva Y.L., Il'in V.P. Accuracy Improvement in Magnetic Field Modeling for an Axisymmetric Electromagnet. NASA Technical Paper 2000-210194. 2000.
3. Kedzja P., Czechowski T., Baranowski M., Jurga J., Szcześniak E. // Appl. Magn. Reson. 2013. V. 44. P. 605. <https://doi.org/10.1007/s00723-012-0427-5>
4. Герус С.В., Локк Э.Г., Анненков В.Ю. // Изв. РАН. Серия физическая. 2021. Т. 85. С. 1538. <https://doi.org/10.31857/S0367676521110107>
5. Балдин А.А., Волошина И.Г., Перепелкин Е.Е., Полякова Р.В., Российская Н.С., Шаврина Т.В., Юдин И.П. // ЖТФ. 2007. Т. 77. № 11. С. 7. <https://doi.org/10.1134/S1063784207110023>
6. Фахрутдинов А.Р., Фаттахов Я.В., Шагалов В.А., Хабинов Р.Ш., Баязитов А.А. // ПТЭ. 2019. № 4. 150. <https://doi.org/10.1134/S0032816219040074>
7. Балдин А.А., Гуськов Б.Н., Долгий С.А., Кадыков М.Г., Малинина Л.В., Николаевский Г.П., Перепелкин Е.Е., Российская Н.С., Семашко С.В., Стариков А.Ю., Старикова С.Ю., Юдин И.П. Измерение объемной карты магнитного поля для магнитооптического спектрометра МАРУСЯ. Дубна: ОИЯИ, Р13-2006-67, 2006.
8. Omelyanchik A., Marques J.L., Rivas M., Rodionova V., Fabio Canepa F., Peddis D. // Meas. Sci. Technol. 2023. V. 34. P. 107001. <https://doi.org/10.1088/1361-6501/acde9b>

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

- Рис. 1.** Схематическое изображение лабораторного электромагнита (1 – полюса, 2 – катушки, 3 – ярмо) и выбор системы координат для описания распределения магнитного поля в зазоре магнита✓
- Рис. 2.** Схема использованных конфигураций полюсов электромагнита и конструкций матрицы для фиксации зонда измерителя магнитной индукции. Заливкой отмечены положения зонда, использованные для определения коэффициентов полиномиального разложения.
- Рис. 3.** Сравнение измеренного распределения продольной компоненты вектора магнитной индукции и описания этого распределения в полиномиальной модели полиномом шестого порядка для плоских полюсов магнита (слева), для конических полюсов (справа): **а, б** – сравнение измеренных значений B_z (символы) и наилучшего описания в полиномиальной модели; **в, г** – цветовая карта модуля относительного отклонения вычисленных в полиномиальной модели значений магнитной индукции от измеренного.
- Рис. 4.** **а** – Сравнение измеренного и вычисленного значений радиальных компонент вектора магнитной индукции для конических полюсов, B_r соответствует направлению вверх по рис. 2; **б** – разность измеренного и вычисленного значений радиальной компоненты вектора магнитной индукции.
- Рис. 5.** **а** – Цветовая карта распределения модуля вектора магнитной индукции. Линии уровня проведены в интервале от 0.9 до 1.1 с шагом 0.02; **б** – цветовая карта распределения угла отклонения вектора магнитной индукции от оси. Линии уровня проведены в интервале от -5° до $+5^\circ$ с шагом 1° .
- Рис. 6.** Сравнение значений B_z , вычисленных в полиномиальной модели с коэффициентами, определенными по всем положениям датчика и по контрольному набору из шести положений датчика, выделенных заливкой: **а** – для плоских полюсов, **б** – для конических полюсов.

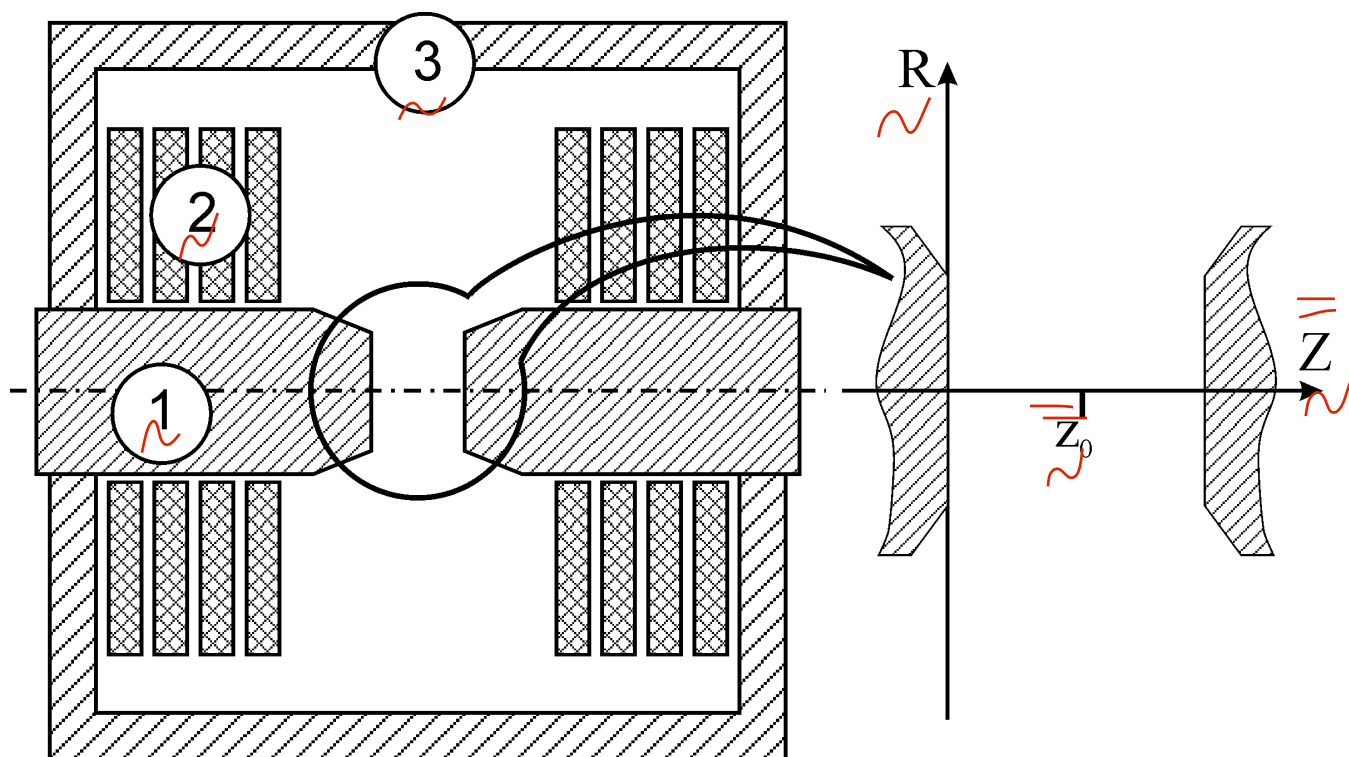


Рис. 1.

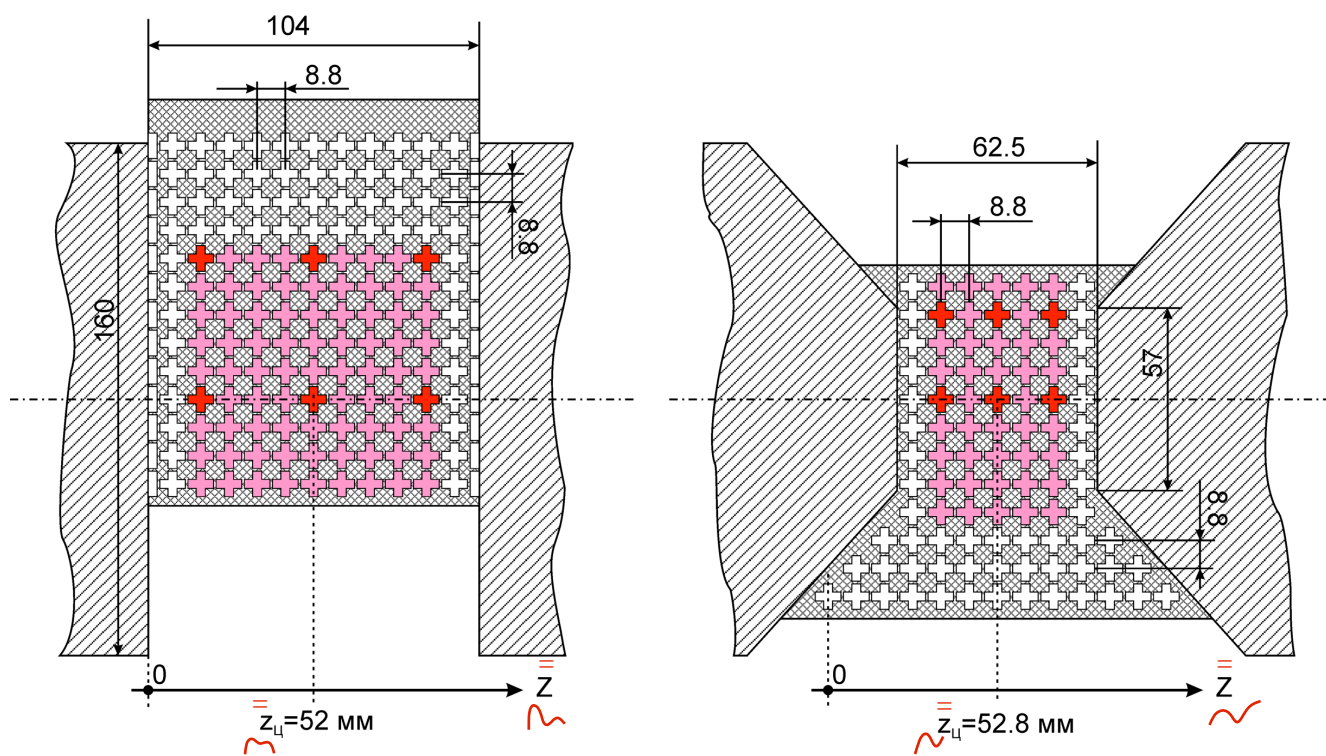


Рис. 2.

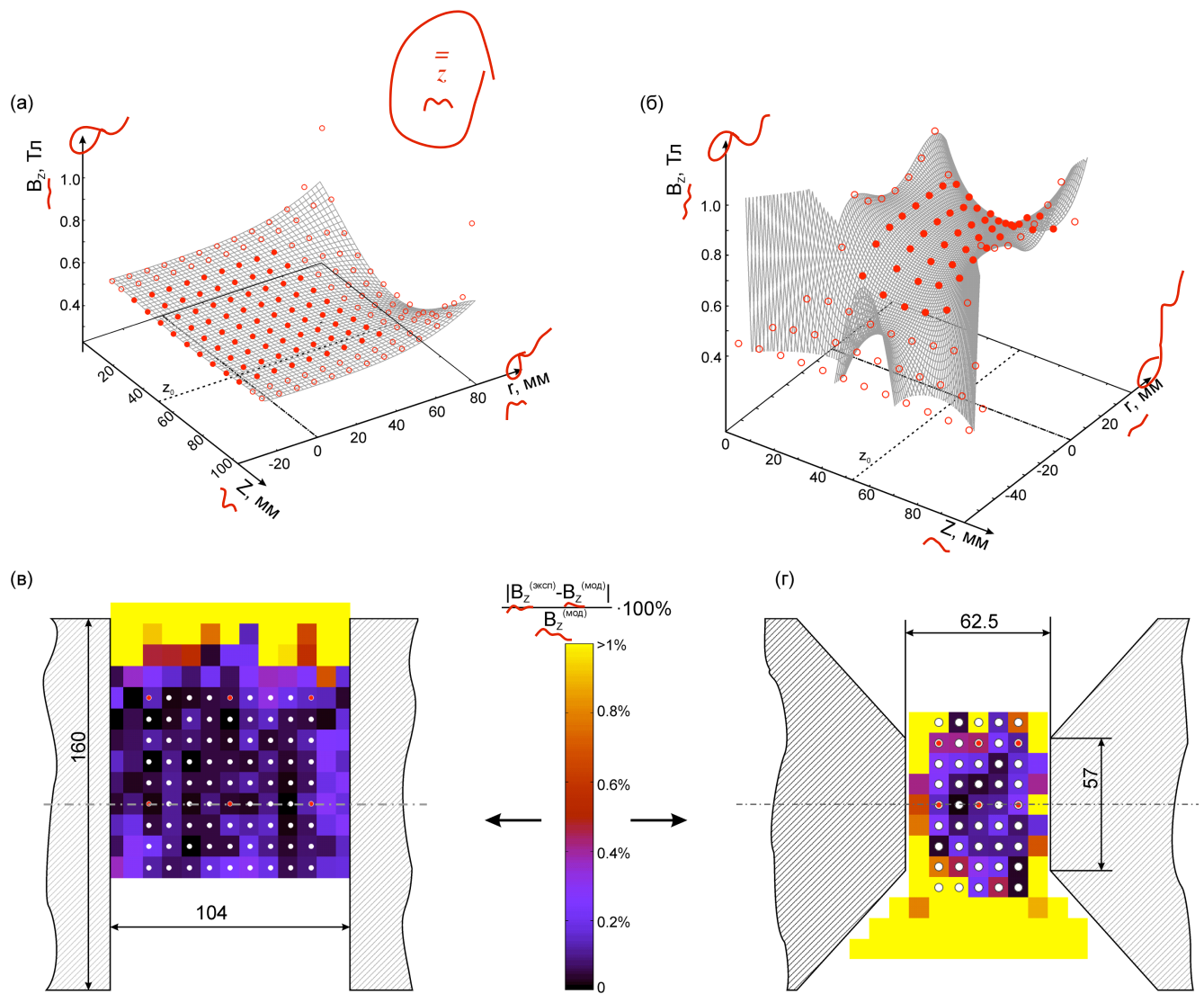


Рис. 3.

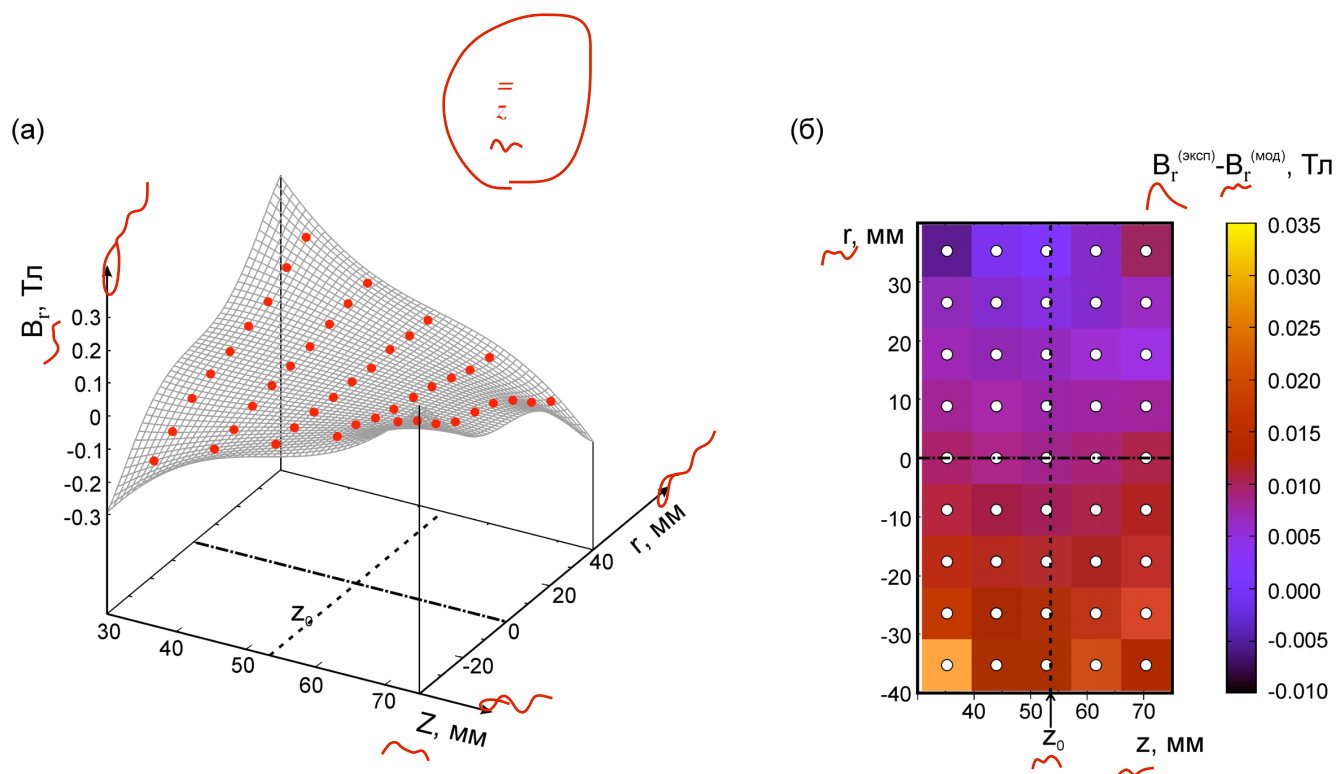


Рис. 4.

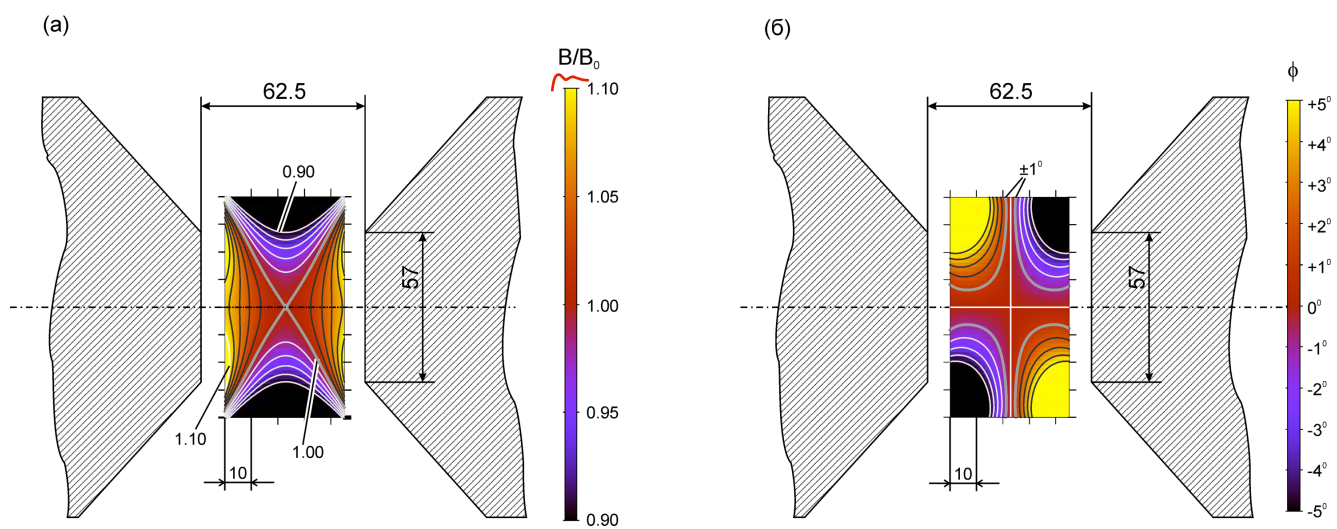


Рис. 5.

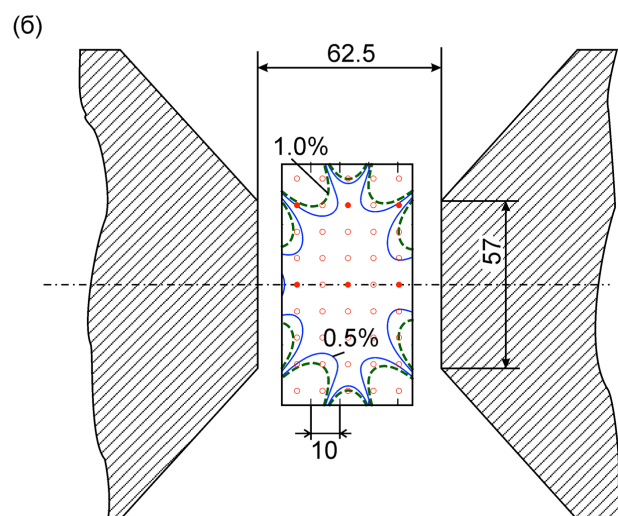
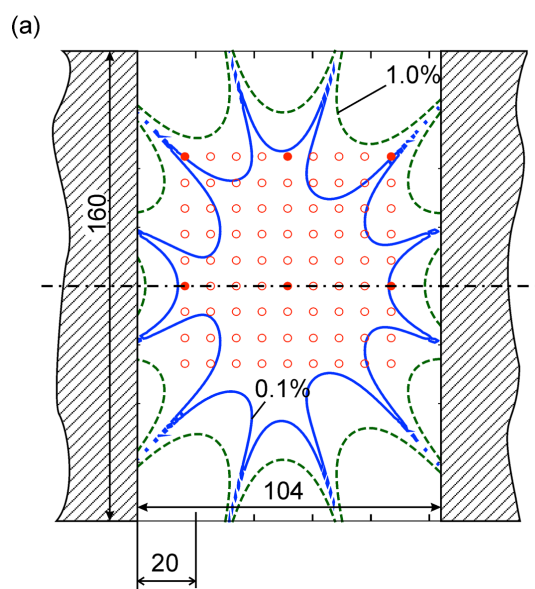


Рис. 6.