

ТЕХНИКА ЯДЕРНОГО  
ЭКСПЕРИМЕНТА

УДК 621.384.63

ЗАПРЕЩЕННЫЕ ПОЛОСЫ БЕТАТРОННЫХ ЧАСТОТ В КОЛЛАЙДЕРЕ  
ВЭПП-2000<sup>1</sup>

© 2024 г. Д. Э. Чистяков<sup>a, b, \*</sup>, Е. А. Переведенцев<sup>a, b</sup>

<sup>a</sup>Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера

Сибирского отделения Российской академии наук

Россия, 630090, Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 11

<sup>b</sup>Новосибирский государственный университет

Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1

\*e-mail: [d.e.chistyakov@inp.nsk.su](mailto:d.e.chistyakov@inp.nsk.su)

Поступила в редакцию 13.12.2023 г.

После доработки 8.05.2024 г.

Принята к публикации 20.05.2024 г.

Соленоиды финального фокуса электрон-позитронного коллайдера с круглыми пучками ВЭПП-2000 могут создавать запрещенные полосы на плоскости бетатронных частот. Это ограничивает важную для коллайдера область вблизи параметрических резонансов (малых дробных частей бетатронных частот). Представлен теоретический обзор совместного действия эффектов от неточной компенсации соленоидов и параметрических резонансов на целых частотах. Результаты дополнены численными расчетами и моделированием с помощью программы RING. Из эксперимента найдены границы области устойчивости на плоскости бетатронных частот, их положение согласуется с теоретическим ожиданием.

~~Ключевые слова: запрещенные полосы, параметрические резонансы, бетатронные частоты~~

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Наличие связи бетатронных колебаний, например из-за нескомпенсированного поворота плоскости колебаний от соленоидов финального фокуса коллайдера ВЭПП-2000 [1], приводит к появлению запрещенных полос специального вида на плоскости бетатронных частот. Такого

---

<sup>1</sup>Материалы 28-й конференции по ускорителям заряженных частиц “RuPAC’23”, Новосибирск.

рода ограничение вместе с различными машинными резонансами сужает рабочую область бетатронных частот. Для помещения рабочей точки в максимально эффективную для коллайдера область малых дробных частей бетатронных частот необходимо контролировать, т.е. уменьшать влияние совместного эффекта запрещенных полос и резонансов на целых частотах.

## 2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

При описании линейного поперечного движения частиц в циклическом ускорителе с учетом связи бетатронных колебаний используется матричный формализм. Положение частиц задается четырехмерными векторами вида  $X^T = (x, p_x, y, p_y)$ . В этих терминах можно описать совместное действие резонансов и запрещенных полос.

### 2.1. Определяющие резонансы

Выражение для амплитуды резонанса на целой частоте можно получить, используя теорию возмущений. К примеру, пусть в системе без связи введено возмущение магнитной системы  $G^T = (0, x \cdot g^x(s), 0, 0)$  для колебаний  $x$ , а  $y \equiv 0$ . Ввиду отсутствия связи решение для колебаний по оси  $x$  может быть найдено из исходных 4-векторов Флоке

$F_x^T = (w_x, w'_x + \frac{i}{w_x}, 0, 0) e^{i\Psi_x}$  ( $w_x$  – огибающая бетатронных колебаний) в виде

$$X = \frac{1}{2}(AF_x + A^*F_x^*), \quad (1)$$

здесь  $A = a(s)e^{i\varphi(s)}$ , где  $a(s)$  и  $\varphi(s)$  – медленные относительно бетатронной частоты функции. В таком случае известно уравнение на  $A$  [2]:

$$A' = -iF_x^{*T}SG, \quad (2)$$

где

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В случае полужелого резонанса ( $\nu_x = \frac{k}{2} + \Delta$ ) после усреднения по быстрой фазе  $\Psi_x = \left(\frac{k}{2} + \Delta\right)\frac{s}{R} + \chi_x(s)$  при малой расстройке  $\Delta$  получаем

$$a' + ia\varphi' = -\frac{i}{2}g_k^x a e^{-i(2\Delta\frac{s}{R} + 2\varphi)}, \quad (3)$$

где за амплитуду полужелого резонанса взята усредненная по периоду структуры величина

$$g_k^x = \frac{1}{2\pi R} \oint w_x^2(s) g^x(s) e^{-i(k_R^s + 2\chi_x(s))} ds. \quad (4)$$

Аналогичные выкладки можно провести и для  $y$ -колебаний для получения амплитуды  $g_k^y$ .

Кроме упомянутых выше резонансов существует разностный ( $\nu_x - \nu_y = n + \Delta$ ) и суммовый ( $\nu_x + \nu_y = n + \Delta$ ) резонансы связи, их амплитуды соответственно равны [3]

$$C = \frac{1}{2\pi R} \oint w_x w_y (C_{field}) e^{-i(\chi_x - \chi_y + \frac{ns}{R})} ds, \quad (5)$$

$$S = \frac{1}{2\pi R} \oint w_x w_y (S_{field}) e^{-i(\chi_x + \chi_y + \frac{ns}{R})} ds, \quad (6)$$

где

$$C_{field} = q + \frac{L}{2} \left( \frac{w'_y}{w_y} - \frac{w'_x}{w_x} \right) + i \frac{L}{2} \left( \frac{1}{w_x^2} + \frac{1}{w_y^2} \right), \quad S_{field} = q + \frac{L}{2} \left( \frac{w'_y}{w_y} - \frac{w'_x}{w_x} \right) + i \frac{L}{2} \left( \frac{1}{w_x^2} - \frac{1}{w_y^2} \right),$$

$$q = \frac{e}{2pc} \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \right), \quad L = \frac{eB_s}{pc}.$$

## 2.2. Матрица периода

При известных огибающих функциях и в отсутствие связи матрица периода для одной степени свободы записывается в виде

$$M_0 = \begin{pmatrix} c_0 - w_0 w'_0 s_0 & w_0^2 s_0 \\ - \left( w_0'^2 + \frac{1}{w_0^2} \right) s_0 & c_0 + w_0 w'_0 s_0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где  $c_0 = \cos \mu_0$ ,  $s_0 = \sin \mu_0$ ,  $\mu_0 = 2\pi\nu_0$  – набег бетатронной фазы за период.

Учет уединенного резонанса на целой частоте можно сделать, продолжая выкладки теории возмущений (1)–(4) из предыдущего раздела. Новая матрица периода будет построена из возмущенных векторов Флоке  $F_a$  и  $F_b$ , а также их собственных чисел  $\lambda$  (набегов бетатронных фаз) следующим образом:

$$M = (F_a F_b) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_a & 0 \\ 0 & \lambda_b \end{pmatrix} \cdot (F_a F_b)^{-1}, \quad (8)$$

где  $(F_a F_b)$  – матрица  $2 \times 2$ , составленная из двух векторов-столбцов.

Рассчитанные таким образом элементы матрицы  $M$  соответственно равны

$$m_{11} = c_r - s_r \frac{w'w(\delta + g_k c_\theta) - g_k s_\theta}{r},$$

$$m_{12} = s_r \frac{w^2(\delta + g_k c_\theta)}{r},$$

$$m_{21} = -s_r \left\{ A_m \frac{\delta}{r} + (B_m c_\theta - C_m s_\theta) \cdot \frac{gk}{r} \right\},$$

$$m_{22} = c_r + s_r \frac{w'w(\delta + g_k c_\theta) - g_k s_\theta}{r}, \quad (9)$$

где  $g_k$  – модуль амплитуды соответствующего резонанса (4),  $\alpha$  – его комплексная фаза,

$$\delta = \frac{2\Delta}{R}, c_r = \cos\left(\frac{1}{2}sr\right), s_r = \sin\left(\frac{1}{2}sr\right), r = \sqrt{\delta^2 - g_k^2}, c_\theta = \cos(\alpha - \delta s + 2\Psi),$$

$$s_\theta = \sin(\alpha - \delta s + 2\Psi), A_m = \left(w'^2 + \frac{1}{w^2}\right), B_m = \left(w'^2 - \frac{1}{w^2}\right), C_m = 2\frac{w'}{w}.$$

Для двух степеней свободы матрица периода  $4 \times 4$  без связи запишется в виде

$$M_4 = \begin{pmatrix} M_x & 0 \\ 0 & M_y \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где за  $M_{x,y}$  можно взять (7) или (8) для соответствующей степени свободы.

Связь бетатронных колебаний из-за соленоидов можно описать, например, с помощью тонкой матрицы поворота плоскости колебаний на угол  $\varphi$ :

$$R = \begin{pmatrix} I \cdot \cos \varphi & I \cdot \sin \varphi \\ -I \cdot \sin \varphi & I \cdot \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где  $I$  – единичная матрица  $2 \times 2$ .

Тогда новая матрица периода будет выражена произведением

$$M_{tot} = R \cdot M_4. \quad (12)$$

### 2.3. Запрещенные полосы бетатронных частот

Появление запрещенных полос бетатронных частот обусловлено тем, что при внедрении возмущения не всем начальным частотам соответствуют устойчивые решения.

В общем случае устойчивое решение соответствует условиям

$$|\cos \mu| \leq 1, \quad (13)$$

$$Im(\cos \mu) = 0. \quad (14)$$

При переходе к двумерным колебаниям запрещенные полосы превращаются в запрещенные области. Так, для  $x$  и  $y$  матриц (7) с возмущением  $R$  можно найти собственные числа  $e^{\pm i\mu_{1,2}}$  возмущенной матрицы периода (12). Набеги бетатронных фаз за новый период задаются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \cos \mu_{1,2} = & \cos \frac{\mu_{0x} + \mu_{0y}}{2} \cos \frac{\mu_{0x} - \mu_{0y}}{2} \cos \varphi \pm \\ & \pm \sqrt{\left[ \sin^2 \frac{\mu_{0x} + \mu_{0y}}{2} \left( 1 - \cos^2 \frac{\mu_{0x} - \mu_{0y}}{2} \cos^2 \varphi \right) + \right.} \\ & \left. + B \sin \mu_{0x} \sin \mu_{0y} \sin^2 \varphi \right]}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $B = \frac{1}{4} \left\{ \left( \frac{w_{0x}}{w_{0y}} - \frac{w_{0y}}{w_{0x}} \right)^2 + (w_{0x}w'_{0y} - w_{0y}w'_{0x})^2 \right\}$ , а значения огибающих функций взяты в начальной точке.

Тогда запрещенные области, выделенные розовым цветом, выглядят так, как показано на рис. 1.

**Рис. 1.** Запрещенные полосы бетатронных частот при возмущении поворотом: **а** –  $\varphi = 2\pi \cdot 0.05$ ,  $B = 0.125$ ; **б** –  $\varphi = 2\pi \cdot 0.15$ ,  $B = 0.125$ ; **в** –  $\varphi = 2\pi \cdot 0.05$ ,  $B = 0.375$ ; **г** –  $\varphi = 2\pi \cdot 0.15$ ,  $B = 0.375$ .

Кроме запрещенных областей и их границ можно отобразить линии уровня новых косинусов набега бетатронной фазы (рис. 2). Здесь линии уровня красного и синего цветов соответствуют двум новым косинусам, розовые области – запрещенные. На плоскости возмущенных частот эти линии уровня переходят в обычную прямоугольную сетку,  $v_{x,y} = \text{const}$ .

**Рис. 2.** Линии уровня косинусов набега бетатронной фазы.

На рис. 3 представлен результат численного расчета запрещенных областей, отмеченных красным цветом, для случая совместного действия резонансов на целых частотах и поворота от соленоидов. Матрица периода выражена произведением матриц (8) и возмущения  $R$  с параметрами связи, близкими к рис. 2, и разными амплитудами резонансов.

**Рис. 3.** Совместное действие резонансов и соленоидов: **а** –  $g^{x,y} = 0.05$ ,  $\alpha^{x,y} = 0$ ; **б** –  $g^{x,y} = 0.05$ ,  $\alpha^x = \pi \cdot 0.5$ ,  $\alpha^y = 0$ ; **в** –  $g^{x,y} = 0.1$ ,  $\alpha^{x,y} = 0$ ; **г** –  $g^{x,y} = 0.1$ ,  $\alpha^x = \pi \cdot 0.5$ ,  $\alpha^y = 0$ .

В целом, присутствие резонансов на целых частотах искажает повторяющуюся картину рис. 2 вблизи этих целых частот; при отдалении от них, в других клетках, картина восстанавливается. На рис. 4 параметры резонансов следующие:  $g^x = 0.12$ ,  $g^y = 0.08$ ,  $\alpha^x = 2\pi \cdot 0.2$ ,  $\alpha^y = 0$ .

**Рис. 4.** Совместное действие резонансов и соленоидов. На плоскости частот показано несколько клеток.

### 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ПРОГРАММЕ RING

Для облегчения понимания экспериментальных данных было проведено моделирование устойчивости движения на программе RING в исходной линейной оптике коллайдера ВЭПП-2000 с целыми частями бетатронных частот  $[v_x] = 4$ ,  $[v_y] = 2$ . В этой оптике соленоиды финального фокуса в каждом из двух мест встречи попарно скомпенсированы (суммарно не вращают плоскость бетатронных колебаний).

Пусть нарушение компенсации соленоидов представлено бесконечно тонким элементом, вращающим плоскость бетатронных колебаний на малый угол, при этом пренебрегается возмущение фокусировки соленоидов. Расположение этого элемента у одного из соленоидов и описание его матрицей (11) с углом  $\varphi = 2\pi \cdot 0.05$  дает результат, показанный на рис. 5.

**Рис. 5.** Моделирование с элементом кручения нулевой длины.

Здесь слева представлена плоскость невозмущенных частот, а справа – возмущенных, т.е. исходная рабочая точка на плоскости слева под воздействием возмущения связи переходит в другое место на плоскости справа. Для наглядности серии точек разделены цветами.

Таким образом, с помощью моделирования показано, что край запрещенной зоны, вызванной возмущением связи в виде тонкого элемента кручения, переходит в линии на целых возмущенных частотах.

На реальной установке возмущение связи создается нарушением компенсации соленоидов. Иначе говоря, чтобы создать угол из формулы (15), необходимо усилить или ослабить поле соленоида, при этом также изменятся его фокусирующие свойства. По этой причине картина моделирования предсказуемо приобретет отличия от ожидаемой. Результат моделирования с суммарным углом кручения  $\varphi = 2\pi \cdot 0.01$  приведен на рис. 6, однако, граница запрещенных областей по-прежнему соответствует целым частотам.

**Рис. 6.** Моделирование с изменением полей соленоидов.

#### 4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Картина реальных запрещенных областей была экспериментально изучена на коллайдере ВЭПП-2000 с одиночным пучком электронов. Из истории колебаний пучка, возбужденных ударом, с помощью фурье-преобразования определялось положение рабочей точки [4]. Типичный вид данных вблизи разностного резонанса связи показан на рис. 7.

**Рис. 7.** История колебаний пучка и ее спектр по координатам  $x$  и  $y$ .

Помимо этого, велось измерение времени жизни пучка путем численной аппроксимации токовой зависимости от времени с характерным временем спада  $\tau = -I/\dot{I}$ . При нормальной работе комплекса время жизни составляет порядка 4000 с.

Положение запрещенных областей было снято в наиболее интересной области малых дробных частей бетатронных частот. Перемещение рабочей точки имеющимися на пультовой коллайдера “ручками” дало следующую картину времени жизни, изображенную на рис. 8.

**Рис. 8.** Линии равного времени жизни.

Резкий спад времени жизни вызван приближением к краям запрещенных областей, при котором нарастают биения бета-функций, и пучок начинает быстрее гибнуть, не попадая в динамическую апертуру.

Таким образом, экспериментально найдено положение границы устойчивости и, следовательно, края запрещенной зоны. Форма этой границы создана совместным действием определяющих резонансов.

#### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Качественно представлены причины появления запрещенных полос бетатронных частот, их расположение и форма, а также результаты численного моделирования границ устойчивости на программе RING и экспериментально измеренное положение линий равного времени жизни на плоскости бетатронных частот ВЭПП-2000. Расширение рабочей области сводится к уменьшению резонансных амплитуд указанных в работе резонансов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беркаев Д.Е., Шварц Д.Б., Шатунов П.Ю., Rogovskiy Ю.А., Романов А.Л., Кооп И.А., Шатунов Ю.М., Землянский И.М., Лысенко А.П., Perevedentsev E.A., Станкевич А.С., Сенченко А.И., Хазин Б.И., Анисенков А.В., Гаязов С.Е. и др. // ЖЭТФ. 2011. Т. 140. С. 247.
2. Perevedentsev E.A. // AIP Conf. Proc. 2001. V. 592. P. 6.  
<https://doi.org/10.1063/1.1420408>
3. Guignard G. The General Theory of All Sum and Difference Resonances in a Three-Dimensional Magnetic Field in a Synchrotron. Geneva: CERN, 1976. P. 74.
4. Rogovsky Yu.A., Bekhtenev E.A. // Proceedings of DIPAC2011. Hamburg, Germany. 2011. P. 203.



## ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

**Рис. 1.** Запрещенные полосы бетатронных частот при возмущении поворотом: **а** –  $\varphi = 2\pi \cdot 0.05, B = 0.125$ ; **б** –  $\varphi = 2\pi \cdot 0.15, B = 0.125$ ; **в** –  $\varphi = 2\pi \cdot 0.05, B = 0.375$ ; **г** –  $\varphi = 2\pi \cdot 0.15, B = 0.375$ .

**Рис. 2.** Линии уровня косинусов набега бетатронной фазы.

**Рис. 3.** Совместное действие резонансов и соленоидов: **а** –  $g^{x,y} = 0.05, \alpha^{x,y} = 0$ ; **б** –  $g^{x,y} = 0.05, \alpha^x = \pi \cdot 0.5, \alpha^y = 0$ ; **в** –  $g^{x,y} = 0.1, \alpha^{x,y} = 0$ ; **г** –  $g^{x,y} = 0.1, \alpha^x = \pi \cdot 0.5, \alpha^y = 0$ .

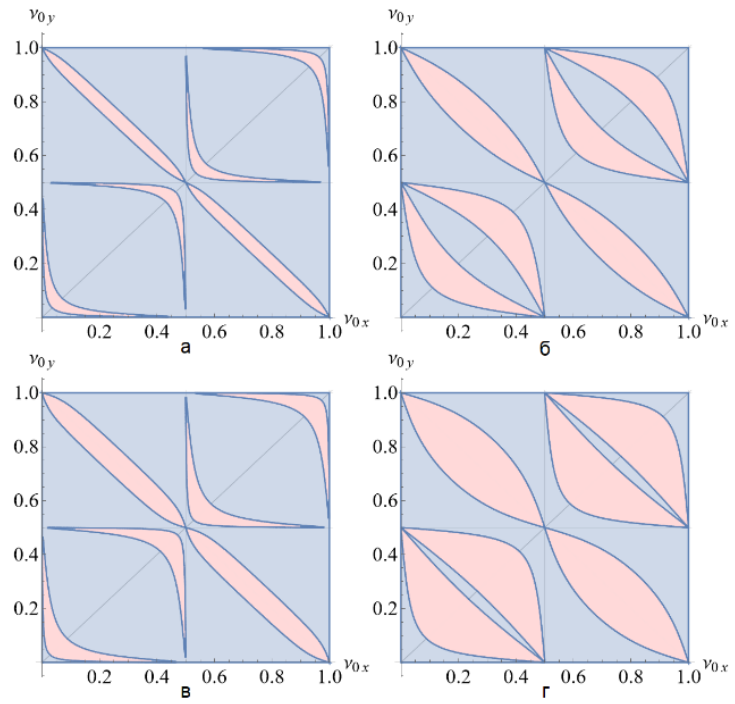
**Рис. 4.** Совместное действие резонансов и соленоидов. На плоскости частот показано несколько клеток.

**Рис. 5.** Моделирование с элементом кручения нулевой длины.

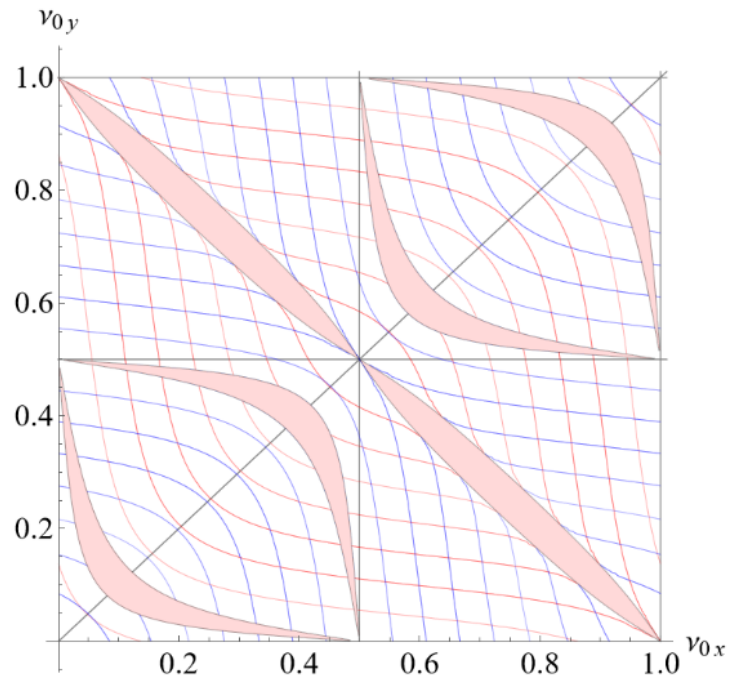
**Рис. 6.** Моделирование с изменением полей соленоидов.

**Рис. 7.** История колебаний пучка и ее спектр по координатам  $x$  и  $y$ .

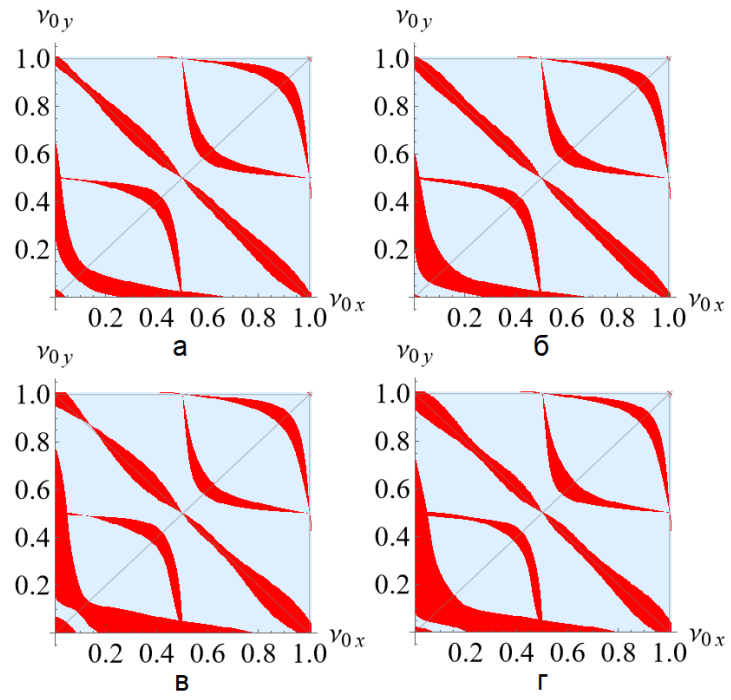
**Рис. 8.** Линии равного времени жизни.



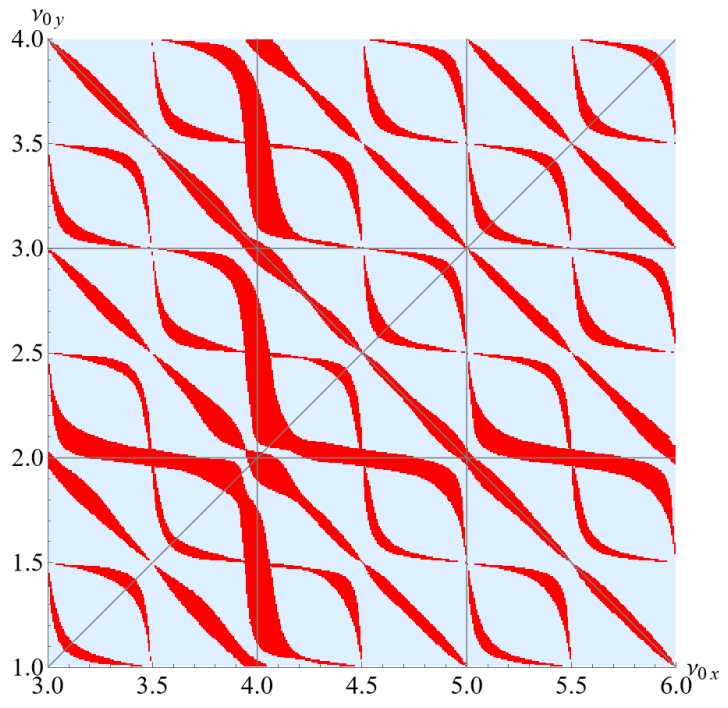
**Рис. 1.**



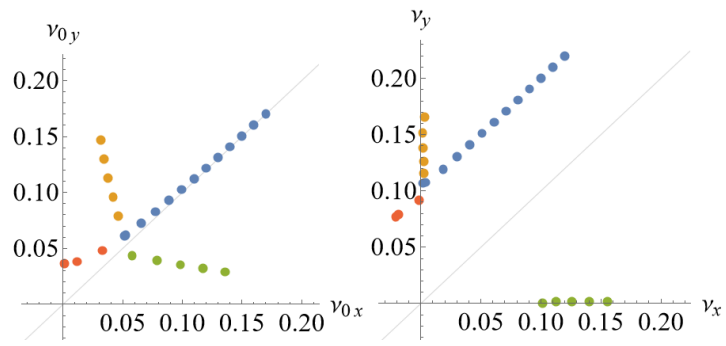
**Рис. 2.**



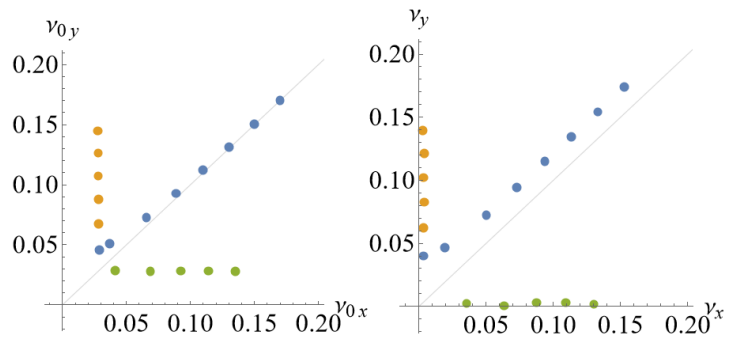
**Рис. 3.**



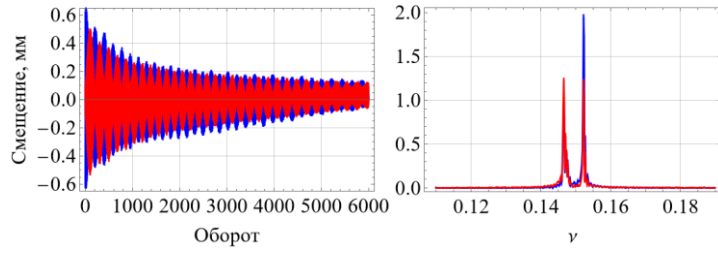
**Рис. 4.**



**Рис. 5.**



**Рис. 6.**



**Рис. 7.**



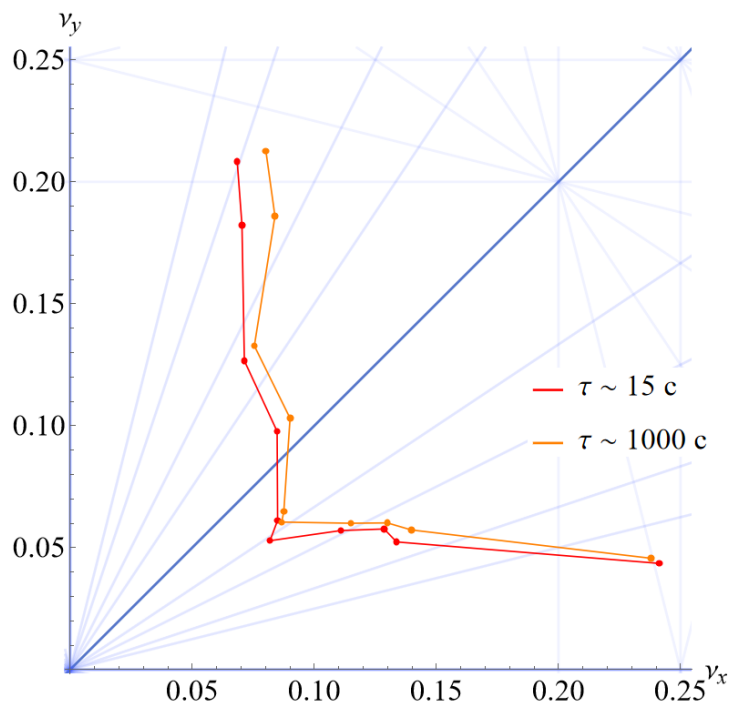


Рис. 8.

Для связи с авторами:

+7 (383) 329 47 44

Д. Э. Чистяков

d.e.chistyakov@inp.nsk.su

danil-chistyakov2001@mail.ru (альтернативный адрес)

**Для переводчика:**

~~СПЕЦИФИЧЕСКИЕ ТЕРМИНЫ И ПЕРЕВОД~~

~~Запрещенные полосы – stopbands~~

~~Бетатронные частоты – betatron tunes~~

~~Круглые встречные пучки – round colliding beams~~

~~Граница области устойчивости – stability domain boundary~~

## ~~ВЕТАТРОН STOPBANDS IN VEPP-2000 COLLIDER~~

~~D. E. Chistyakov, E. A. Perevedentsev~~

~~The final-focus solenoids of the round-beam  $e^+e^-$  collider VEPP-2000 can cause stopbands in the betatron tune plane. This specific stopband domain limits the available tune space in the most important region above the integer tunes. We present a theoretical study of the combined effect of the decompensated solenoids and the parametric resonances at the integers. The results are compared with numerical investigations of this combined effect. Experimental data on scanning of the VEPP-2000 tunes showed the limits of the available tune domain which agree with the theoretical expectations.~~

### ~~ЛИТЕРАТУРА~~

- ~~2. Perevedentsev E.A. Linear beam dynamics and beyond // AIP Conf. Proc., 2001. V. 592. P. 6.  
<https://doi.org/10.1063/1.1420408>~~
- ~~3. Guignard G. The General Theory of All Sum and Difference Resonances in a Three-Dimensional Magnetic Field in a Synchrotron. Geneva: CERN, 1976. P. 74.~~
- ~~4. Rogovsky Yu.A., Bekhtenev E.A. Pickup beam measurement system at the VEPP-2000 collider // Proceedings of DIPAC2011. Hamburg, Germany. 2011. P. 203.~~